



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025

CLASA a V-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor ***)

Fie a și b două numere naturale nenule. Împărțind numărul a la numărul b , obținem câtul 4 și restul 50.

- a) Arătați că numărul $2a - 8b + 629$ este simultan pătrat perfect și cub perfect.
b) Arătați că numărul perechilor (a, b) care, în plus, verifică relația $a + 11b \leq 2025$, este pătrat perfect.

	Barem asociat
a) Din teorema împărțirii cu rest obținem $a = b \cdot 4 + 50$, $b > 50$.	1p
Deducem că $a - 4b = 50$, de unde $2a - 8b = 100$, deci $2a - 8b + 629 = 729$	1p
Cum $729 = 3^6 = 27^2 = 9^3$, numărul este simultan pătrat perfect și cub perfect.	1p
b) Cum $a = b \cdot 4 + 50$, obținem $a + 11b = 4b + 50 + 11b = 15b + 50$, de unde $15b + 50 \leq 2025$, adică $15b \leq 1975$, de unde $b \leq 131$.	2p
Cum $51 \leq b \leq 131$, obținem $81 = 9^2$ de perechi.	2p

Problema 2 (autor ***)

- a) Există pătrate perfecte formate din 2025 de cifre identice ?
b) Dacă numărul 2^{2025} are m cifre și 5^{2025} are n cifre, determinați $m + n$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Numerele cu 2025 de cifre identice sunt de forma $\overbrace{a \dots aa}^{2025 \text{ cifre}}$, iar dacă sunt pătrate perfecte, a poate fi doar 1, 4, 5, 6 sau 9.	1p
Pentru $a \neq 4$, scriem numerele sub forma $\overbrace{a \dots a00}^{2025 \text{ cifre}} + \overbrace{aa}^{2 \text{ cifre}}$, și deducem că restul împărțirii la 4 poate fi 3 (dacă a este una din cifrele 1, 5 sau 9) sau 2 (dacă $a = 6$), deci nu poate fi pătrat perfect	2p
Pentru $a = 4$, scriem numărul sub forma $4 \cdot \overbrace{1 \dots 11}^{2025 \text{ cifre}}$ și, cum $\overbrace{1 \dots 11}^{2025 \text{ cifre}}$ nu este pătrat perfect, deducem că numărul nu poate fi pătrat perfect. Deci nu există pătrate perfecte formate din 2025 de cifre identice.	1p
b) Cum 2^{2025} are m cifre, deducem $10^{m-1} < 2^{2025} < 10^m$, 5^{2025} are n cifre, deci $10^{n-1} < 5^{2025} < 10^n$.	1p
Înmulțind, obținem $10^{m+n-2} < 10^{2025} < 10^{m+n}$, deci $m + n - 2 < 2025 < m + n$	1p
Obținem $2025 < m + n < 2027$, deci $m + n = 2026$.	1p

Problema 3 (autor Mihaela Berindeanu, GM nr. 10/2024)

Pe o masă sunt 200 de bile. Alex și Bob ridică, pe rând, între 1 și 6 bile de pe masă. Câștigătorul jocului este cel care ridică ultima bilă. Știind că Alex este cel care începe jocul, stabiliți o strategie de câștig pentru acest jucător.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă înainte de penultima mutare, pe masă există 7 bile și este rândul lui Bob să ridice un număr de bile cuprins între 1 și 6, pe masă va rămâne un număr de bile cuprins între 1 și 6 pe care le va lua Alex, care câștigă jocul.	2p
Cum $200 = 7 \cdot 28 + 4$, Alex trebuie să ridice la prima mutare 4 bile, rămânând $7 \cdot 28$ bile.	2p
La fiecare pas, Alex va ridica diferența până la 7 a numărului de bile ridicate de Bob.	2p
După 55 de mutări, pe masă rămân 7 bile și este rândul lui Bob, deci Alex câștigă jocul.	1p

Problema 4 (autor ***)

Numerele de la 1 la 81 sunt scrise pe o tablă 9×9 . Demonstrați că există două numere vecine a căror diferență să fie mai mare sau egală cu 6. (Numerele vecine sunt cele care sunt scrise în pătrățele care au o latură comună).

Detalii rezolvare	Barem asociat
Presupunem contrariul. Atunci, dacă există un drum de lungime k format din pătrățele consecutive, suma diferențelor numerelor din aceste pătrățele este cel mult $5k$.	3p
Dar diferența dintre 1 și 81 este 80 și numărul de pași dintre două pătrățele ale tablei este cel mult 16.	2p
Deoarece $5 \cdot 16 = 80$ putem avea diferența maximă 5 o singură dată. Pe oricare alt drum de la 1 la 81, vom găsi perechi de vecini care diferă prin cel puțin 6	2p